

Politechnika Łódzka

Katedra Przyrządów Półprzewodnikowych i Optoelektronicznych

WWW.DSOD.PL

**LABORATORIUM METROLOGII ELEKTRYCZNEJ I
ELEKTRONICZNEJ**

ĆWICZENIE nr **1**

**Wyznaczanie niepewności wyników
pomiarów wielkości elektrycznych**

CEL ĆWICZENIA:

Ćwiczenie ma na celu zaznajomienie studentów z niepewnościami w pomiarach, ich szanowaniem z zastosowaniem metod typu A i typu B w pomiarach bezpośrednich i pośrednich.

SPECYFIKACJA APARATURY:

W ćwiczeniu stosowana jest następująca aparatura pomiarowa oraz oprogramowanie:

Aparatura

1. Multimetr APPA 109N (cyfrowy)
2. Multimetr Metex (cyfrowy) typ M-3270D
3. Multimetr cyfrowy z funkcją próbkowania RIGOL DM3051 z interfejsem USB
4. Multimetr Analogowy PROTEK 3030S
5. Zasilacza stabilizowany regulowany +/- 30V ; 5 A

Oprogramowanie:

1. Program do akwizycji danych z multimetru RIGOL poprzez interfejs USB, dostarczony przez producenta.
2. Arkusz kalkulacyjny z pakietu Office do przetwarzania danych z przyrządów pomiarowych
3. Program zainstalowany na komputerach w laboratorium

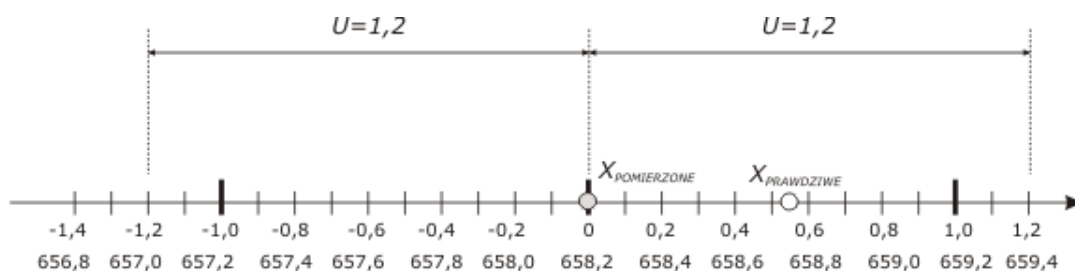
PODSTAWY TEORETYCZNE

Celem badań obiektu lub zjawiska jest znalezienie nieznannej prawdziwej wartości wielkości mierzonej. Ze względu na niedoskonałość przyrządów i metod pomiarowych, oddziaływanie otoczenia i zmienność warunków środowiska poprzez pomiar można jedynie wyznaczyć przedział, w którym z określonym poziomem ufności (zaufania do wyniku) występuje wartość prawdziwa wielkości mierzonej.

Poprawny zapis wyniku pomiaru powinien się składać z liczby, która według nas najlepiej reprezentuje wartość prawdziwą wielkości mierzonej (tzw. estymatę punktową) oraz przypisanej do niej drugiej liczby określającej przedział, w którym z pewnym poziomem ufności (prawdopodobieństwem p) występuje ta wartość prawdziwa.

Przykład poprawnego zapisu wyniku pomiaru: $(658,2 \pm 1,2) \Omega$ $p = 0,95$ w którym „658,2” jest estymatą punktową a „ $\pm 1,2$ ” określa granice szerokości przedziału (rys. 1) wyznaczonego na poziomie ufności $p=0,95$. Poziom ufności jest miarą naszego zaufania do wyznaczonego przedziału. Przedział może być też wyrażony w procentach estymaty czyli: $(658,2 \Omega \pm 1,9 \%)$ $p = 0,95$

Alternatywny zapis wyniku pomiaru, to podawanie granic przedziału np.: $[657,0 \ 659,4]$ i poziomu ufności p . Przedział ten jak przedstawiono na rysunku 1 zawiera w sobie a ściślej „pokrywa” wartość prawdziwą wielkości mierzonej, bo przedział jest wartością zmienną a wartość prawdziwa wartością stałą, chociaż nieznaną.



Rys.1. Graficzna prezentacja wyniku pomiaru i przedziału niepewności:

Do zaokrąglania estymaty wartości prawdziwej i niepewności wyniku pomiaru odnosi się zasada, że zawsze w wyniku pomiaru podaje się jedną cyfrę znaczącą więcej niż pierwszą cyfrą niepewną. W niepewności wyniku pomiaru

są to dwie cyfry znaczące. Zaokrąglanie niepewności następuje zawsze w górę, co jest uzasadnione, aby nie obniżyć poziomu ufności w stosunku do wyniku niezaokrąglonego.

Wyjątkowo w niepewności można pozostawić jedną cyfrę znaczącą o ile zwiększenie niepewności przy zaokrąglaniu w górę nie spowoduje jej zwiększenia o więcej niż 10 %.

Prawidłowo zaokrąglona wartość wielkości (estymata) i jej niepewności mają zawsze taką samą liczbę miejsc dziesiętnych po przecinku.

Przy zaokrąglaniu wartości wyniku pomiaru stosujemy zasadę, że jeżeli ostatnią cyfrą zaokrąglaną jest 0, 1, 2, 3, 4 to zaokrąglamy poprzednią cyfrę w dół, a gdy 5, 7, 8, 9 w górę. Jeżeli natomiast jest cyfra 5, to zaokrąglamy poprzednią w górę jeżeli po niej następuje na dowolnej pozycji jakkolwiek cyfra inna niż zer. W przeciwnym razie zaokrąglamy w dół o ile jest ona parzysta, w przeciwnym razie w górę do liczby parzystej.

Przykład 1

Przed	$R = (107,5235 \pm 0,00921) \Omega$
Po	$R = (107,52 \pm 0,01) \Omega$

Uzasadnienie: zwiększenie niepewności jest mniejsze niż 10% (8,6%). Wynik wartości wielkości zaokrąglono do tej samej liczby cyfr znaczących ile jest ich w niepewności

Przykład 2

Przed	$R = (107,5234 \pm 0,015126) \Omega$
Po	$R = (107,523 \Omega \pm 0,016) \Omega$

Uzasadnienie: dwie cyfry w niepewności bo pozostawienie jednej spowodowałoby wzrost niepewności o ponad 32 % (więcej niż 10%).

Przykład 3

Przed	$R = (107,52350001 \pm 0,015126) \Omega$
Po	$R = (107,524 \pm 0,016) \Omega$

Przykład 4

Przed	$R = (107,5225000 \pm 0,015126) \Omega$
Po	$R = (107,522 \pm 0,016) \Omega$

Przykład 5

Przed	$R = (107,5235000 \pm 0,015126) \Omega$
Po	$R = (107,524 \pm 0,016) \Omega$

Przykład 6

Przed	$R=(107,522501 \pm 0,01500011) \Omega$
Po	$R=(107,523 \pm 0,016) \Omega$

Przykład 7

Przed	$R=(107,52251 \pm 0,015126) \Omega$
Po	$R=(107,523 \pm 0,016) \Omega$

Przykład 8

Przed	$R = (376,35602 \pm 0,12501) \Omega$
Po	$R = (376,36 \pm 0,13) \Omega$

Przykłady zapisów wyniku pomiaru z niepewnością:

$$(127 \pm 13) \mu\text{m} \quad p=0,95$$

$$(23,2 \pm 0,1) ^\circ\text{C} \quad p=0,95$$

$$(230,4 \pm 1,2) \text{V} \quad p=0,95$$

$$(3,33 \pm 0,12) \text{s} \quad p=0,95$$

$$(50,46 \pm 0,25) \text{Hz} \quad p=0,95$$

$p=0,95$ jest najczęściej stosowanym poziomem ufności.

Źródła niepewności to:

- niedoskonałość definicji i realizacji modelu obiektu mierzonego.
- niedokładność przyrządów pomiarowych (dane producenta lub świadectwa kalibracji)
- błędy odczytu wskazań przyrządów wynikające z niedoskonałości zmysłów obserwatora lub rozdzielczości urządzeń w torze pomiarowym albo pomyłek przy odczycie (te ostatnie kwalifikujemy jako błędy nadmiarowe - „grube”)
- niedoskonałości metod pomiarowych,
- stosowanie przybliżonych wzorów i stałych fizycznych także obarczonych pewną niedokładnością,
- niepełna wiedza o wpływie środowiska na obiekt pomiarowy i na przyrządy pomiarowe

Granice określające przedział niepewności, który zwykle przyjmuje się jako symetryczny w stosunku do estymatora punktowego wielkości mierzonej oznaczają się dużą literą „U”, a poziom ufności małą literą „p”.

Estymatorem punktowym wielkości mierzonej X najczęściej jest średnia arytmetyczna z „ n ” wyników obserwacji (x_i) obliczana jest z zależności:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}. \text{ Ogólny zapis wyniku pomiaru: } x = \bar{x} \pm U \text{ jest równoważny}$$

$$x \in \langle \bar{x} - U; \bar{x} + U \rangle.$$

Niepewność U jest nazywana niepewnością rozszerzoną, a przymiotnik „rozszerzone” pochodzi od dość popularnego sposobu jej obliczenia według wzoru: $U = k_p u_c$, w którym k_p jest współczynniki zwany współczynnikiem rozszerzenia zależnym od poziomu ufności p . u_c jest niepewnością łączną na która składają się dwa komponenty: u_A i u_B dodawane geometrycznie:

$$u_c^2 = u_A^2 + u_B^2.$$

- u_A – jest niepewnością standardową obliczaną metodą statystyczną na podstawie wyników z serii pomiarów (obserwacji) zwaną metodą typu A
- u_B – jest niepewnością standardową obliczaną innymi metodami niż wynikającymi z metody typu A. Dane literaturowe, dane techniczne aparaturowe, doświadczenia nabyte z wcześniej prowadzonych pomiarów.

Jeśli błąd pomiaru traktujemy jako zmienną losową, to niepewność standardowa jest równa odchyleniu standardowemu σ tej zmiennej a w przypadku serii wykonywanych pomiarów odchyleniu standardowemu średniej $s_{n(n-1)}$. Dzięki temu do obliczania niepewności pomiarów można stosować statystykę matematyczną i rachunek prawdopodobieństwa.

Niepewność obliczana metodą typu A i typu B.

Niepewność typu A oblicza się na podstawie rozrzutu wartości serii pomiarów – próbki obserwacji pomiarowych, wykonywanych w jednakowych warunkach. Próbka danych pomiarowych ma skończoną licznosc i jest pobrana z populacji o stałych parametrach statystycznych.

Niepewność typu B oblicza się na podstawie innych danych niż wartości w serii pomiarów. Wśród tych danych są między innymi dane producenta dotyczące dokładności przyrządu zawarte w jego specyfikacji, gwarantowane przez

wytwórcę oraz informacje o zakresie i rozkładzie prawdopodobieństwa czynników oddziałujących na otrzymywane wartości obserwacji.

Niepewność typu A

Obliczenie poprawnej wartości niepewności metodą typu A możliwe jest, gdy w pozyskanej serii obserwacje pomiarowe wielkości mierzonej różnią się wartościami, a różnice te mają charakter losowy. Wartości obserwacji nie mogą więc być obarczone, żadnymi znanymi i nieznanymi a'propri wpływami, np. wskutek oddziaływań środowiska, nie są ze sobą skorelowane. Wówczas można je traktować jako zmienną losową i do oszacowania niepewności stosować statystykę.

Jeżeli X jest zbiorem wyników pomiarów $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ to jako estymatę wartości prawdziwej wielkości mierzonej możemy przyjąć średnią arytmetyczną z n pomiarów:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \text{ - wartość średnia z } n\text{- pomiarów} \quad (1)$$

Odchylenie standardowe próbki o n pomiarach jest pewnym podzbiorem z populacji zawierającej wszystkie możliwe wartości obserwacji. Dla zmiennej losowej ciągłej możliwych jest nieskończenie duża ich liczba, ale należałoby prowadzić pomiary w nieskończenie długim okresie czasu.

Miarą rozrzutu obserwacji w próbie jest odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru (i -tego pomiaru) wyrażające się zależnością:

$$s_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \text{ gdzie } \bar{x} \text{ - wartość średnia z } n \text{ pomiarów} \quad (2)$$

Niepewność standardowa u_A jest równa odchyleniu standardowemu średniej z n - obserwacji i wyraża się zależnością:

$$u_A = s_{n(n-1)} = \frac{s_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (3)$$

Jest to słuszne gdy dla zmiennej losowej przypadkowej o nieskończenie dużej liczbie wielkości wpływających na wynik pomiaru – czyli, gdy rozrzuty wyników

odpowiadają rozkładowi Gaussa dla próby obserwacji liczącej $n > 30$, przy mniejszej liczności próby zastosowanie ma rozkład t-Studenta.

Niepewność standardowa typu A jest równa odchyleniu standardowemu średniej z n pomiarów $u_A = s_{n(n-1)}$

Dla rozkładu Gaussa, współczynnik rozszerzenia k_p dla poziomu ufności $p = 0,95$ wynosi $k_p = 1,96$.

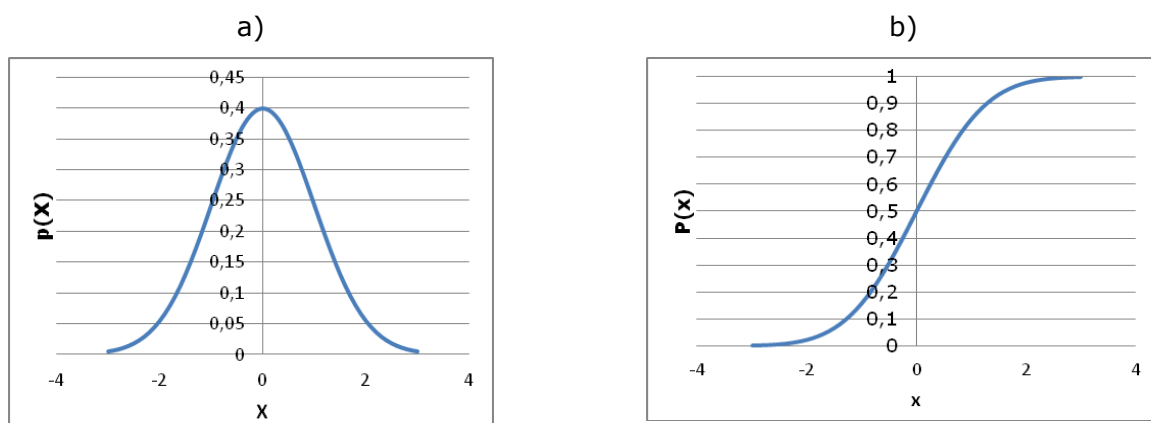
Dystrybuanta czyli skumulowana funkcja gęstości prawdopodobieństwa dla zmiennej losowej o rozkładzie Gaussa wyraża zależność (4),

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)} dx \quad (4)$$

a ciągła funkcja gęstości prawdopodobieństwa wyraża się zależnością:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)} \quad (5)$$

Ich graficzną reprezentację przedstawiono na rys. 2a i rys 2b.



Rys. 2. Funkcja standaryzowanego rozkładu Gaussa $N(0,1)$ czyli dla $\bar{x}=0$ i $\sigma=1$: (a) gęstości prawdopodobieństwa $p(x)$, (b) skumulowana funkcja gęstości prawdopodobieństwa, $P(x)$.

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa dla znormalizowanego rozkładu Gaussa zwanego również rozkładem normalnym stąd oznaczenie dużą literą „N” z parametrami podawanymi w nawiasie, $N(0,1)$: wartość średnia $\bar{x} = 0$, odchylenie standardowe $\sigma=1$.

Dla rozkładu Gaussa, $N(0,1)$ współczynniki rozszerzenia dla wybranych poziomów ufności p zestawiono w tabeli 1.

Tab. 1. Współczynniki rozszerzenia k_p dla wybranych poziomów ufności.

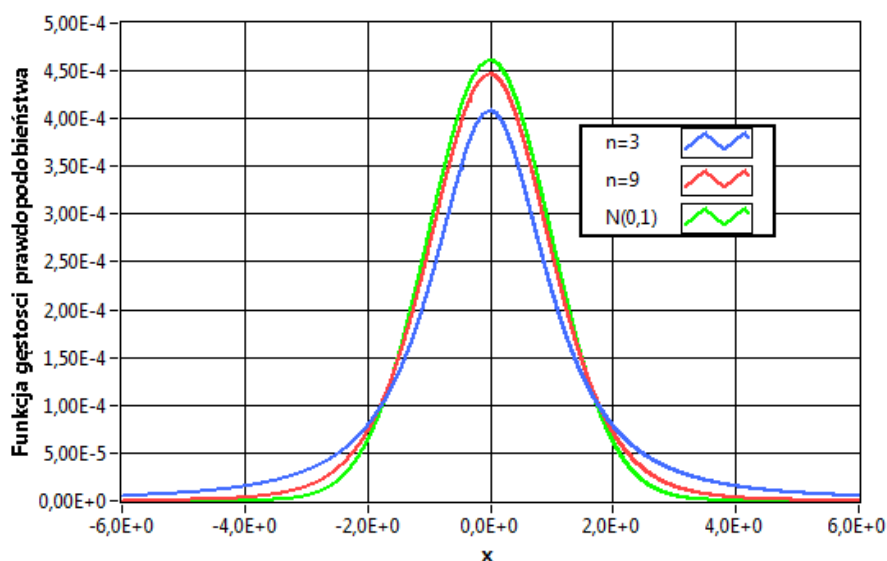
p	0,5	0,683	0,95	0,99	0,997	0,999
k_p	0,676	1	1,96	2,58	2,97	3,29

Rozkład Gaussa jest stosowany dla nieskończenie dużej liczby obserwacji. W praktyce inżynierskiej odnosi się on dla liczby wyników powyżej 30.

W tabeli 1a zestawiono współczynniki rozszerzenia $k_{p,(n-1)}=k_{0,95;\nu}$ dla poziomu ufności $p=0,95$ (najczęściej stosowany) dla wybranych liczby stopni swobody, ν , które w stosunku do liczby wyników pomiarów wyrażone są zależnością: $\nu=n-1$ gdzie n - liczba pomiarów.

Tab. 1a. Współczynniki rozszerzenia $k_{0,95;\nu}$ dla rozkładu t -Studenta ($p=0,95; \nu$)
 ν - liczby stopni swobody ($\nu=n-1$ gdzie n - liczba pomiarów).

ν	2	3	5	7	8	9	10	20	30	50	100	∞
$k_{0,95;\nu}$	4,30	3,18	2,57	2,36	2,31	2,26	2,23	2,09	2,04	2,01	1,984	1,960



Rys 3. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa dla rozkładów: t -Studenta dla $s_{n(n-1)}=1$ dla $n=3$ ($\nu=2$) i $n=9$ ($\nu=8$) obserwacji oraz rozkład Normalny $N(0,1)$.

Niepewność typu B

Do obliczenia niepewności metodą typu B niezbędne jest informacja na temat możliwości wystąpienia błędów pomiarowych pochodzących od innych czynników niż z serii obserwacji.

Takich informacji na temat możliwych błędów występujących przy pomiarze określonym przyrządem dostarcza jego producent podając w danych parametry na podstawie, których oblicza się błąd graniczny tego przyrządu.

Producent podaje zazwyczaj dwa parametry charakteryzujące taki przedział, jeden z nich ma charakter multiplikatywny i oznaczyć go można symbolem δ_m , jest on wyrażany w procentach wartości mierzonej. Drugi parametr jest addytywny δ_a i podaje się go w procentach zakresu miernika.

Na tej podstawie można obliczyć wartość graniczną

$$\Delta_{gr} = \frac{1}{100} \delta_m x_{rdg} + \frac{1}{100} \delta_a x_{zakres}$$

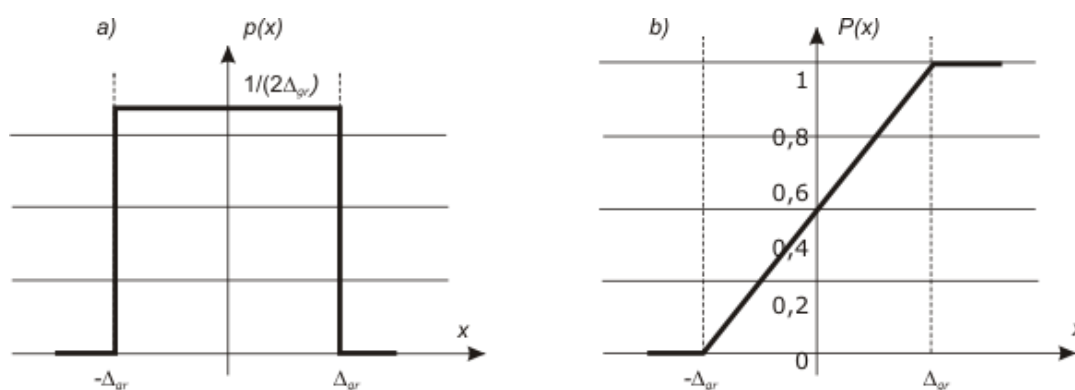
x_{rdg} - oznacza wartość odczytaną z miernika (ang. reading)

Wyznaczenie odchylenia standardowego dla niepewności wyznaczanej metodą typu B wymaga określenia funkcji gęstości rozkładu błędów pomiaru. Jeżeli nie ma podanego rozkładu przez producenta, wówczas można założyć, że każdy z błędów w przedziale $\langle x_{rdg} - \Delta_{gr}; x_{rdg} + \Delta_{gr} \rangle$ jest jednakowo możliwy, tak więc

funkcja gęstości prawdopodobieństwa jest linią prostą w zakresie

$$\langle x_{rdg} - \Delta_{gr}; x_{rdg} + \Delta_{gr} \rangle$$

Na rys. 4 a przedstawiono przykładową funkcję gęstości prawdopodobieństwa rozkładu równomiernego (jednostajnego) w przedziale $\langle -\Delta_{gr} = -2; \Delta_{gr} = 2 \rangle$, a na rys. 4b skumulowana funkcję gęstości prawdopodobieństwa.



Rys. 4. a) funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu jednostajnego i b) jego dystrybuanta – skumulowana funkcja gęstości prawdopodobieństwa

Stosując wzór definiujący, kwadrat odchylenia standardowego (wariancję) oblicza się ze wzoru: $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)(x-\bar{x})^2 dx$, stosując go do funkcji jednostajnej z rys. 4, otrzymuje się:

$$u_{jednostajny(\text{prostokąt})}^2 = \sigma^2 = \int_{-\Delta_{gr}}^{+\Delta_{gr}} \frac{1}{2\Delta_{gr}} x^2 dx = \frac{1}{2\Delta_{gr}} \frac{x^3}{3} \Big|_{-\Delta_{gr}}^{+\Delta_{gr}} = \frac{1}{2\Delta_{gr}} \frac{(\Delta_{gr})^3 - (-\Delta_{gr})^3}{3} = \frac{\Delta^2}{3}$$

czyli

$$u_B = \sqrt{u_{jednostajny(\text{prostokąt})}^2} = \frac{\Delta_{gr}}{\sqrt{3}} \quad (6)$$

Standardową niepewność łączną oblicza się na podstawie niepewności typu A i B jako ich sumę geometryczną: .

$$u_c^2 = u_A^2 + u_B^2 \quad (7)$$

Na podstawie skumulowanej funkcji gęstości prawdopodobieństwa wyznacza się granice najmniejszego przedziału, odpowiadającego wymaganemu poziomowi ufności p . Granice są najczęściej symetryczne, oznaczane $\pm U$. Poziom ufności, p , w interpretacji geometrycznej jest to pole powierzchni pod funkcją gęstości prawdopodobieństwa zawarte pomiędzy osią x i granicami oznaczającymi krańce przedziału niepewności, czyli od $-U$ do $+U$.

Odchylenie standardowe w pomiarach złożonych

Dla pomiarów pośrednich, czyli takich w których wynik jest rezultatem operacji matematycznych na wynikach pomiarów bezpośrednich, np. $R=U/I$, stosuje się matematyczną zależność obliczania niepewności standardowej jako odchylenia standardowego funkcji złożonej zgodnie z teoria rachunku prawdopodobieństwa.

$$u^2 = \left(\frac{\partial f(X_1, X_2, \dots, X_n)}{\partial X_1} \right)^2 \cdot u_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f(X_1, X_2, \dots, X_n)}{\partial X_2} \right)^2 \cdot u_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f(X_1, X_2, \dots, X_n)}{\partial X_n} \right)^2 \cdot u_{x_n}^2 + \left(\frac{\partial^2 f(X_1, X_2, \dots, X_n)}{\partial X_1 \partial X_1} \right)^2 \cdot u_{x_1 x_2}^2 \dots \quad (8)$$

$$u^2 = (c_{x_1})^2 \cdot u_{x_1}^2 + (c_{x_2})^2 \cdot u_{x_2}^2 + \dots + (c_{x_n})^2 \cdot u_{x_n}^2 + (c_{x_1, x_2})^2 \cdot u_{x_1, x_2}^2 \dots \quad (9)$$

Gdzie współczynniki $c_{X_i} = \frac{\partial f(X_1, X_2, \dots, X_n)}{\partial X_i}$; $c_{X_i, X_j} = \frac{\partial^2 f(X_1, X_2, \dots, X_n)}{\partial X_i \partial X_j}$

są nazywane współczynnikami wrażliwości.

Uwaga praktyczna: dla uproszczenia, gdy funkcja gęstości prawdopodobieństwa jest zbliżona do rozkładu Gaussa, do obliczenia niepewności rozszerzonej U na poziomie ufności $p=0,95$ można stosować współczynnik rozszerzenia $k_p=2$ i wówczas $U=2u_c$.

Obliczenie niepewności standardowej pomiaru rezystancji metodą pośrednią dla:

$$R = \frac{V}{I} \quad (10)$$

wykonuje się stosując zależność (8) do (10). Rezystancja R jest funkcją dwóch zmiennych $R=f(V, I)$ czyli $\frac{\partial R}{\partial V} = \frac{1}{I}$; $\frac{\partial R}{\partial I} = V \cdot \left(-\frac{1}{I^2}\right)$ tak więc

$$u_{Bc}^2(R) = \left(\frac{\partial f(R)}{\partial V}\right)^2 u_{BV}^2 + \left(\frac{\partial f(R)}{\partial I}\right)^2 u_{BI}^2 \quad (10)$$

Dalej wprowadzając pojęcie współczynników czułości c_i odpowiednio dla prądu i napięcia c_V co proponuje Przewodnik [1] otrzymuje się::

$$u_{Bc}^2(R) = (c_u)^2 u_{BV}^2 + (c_I)^2 u_{BI}^2 \quad (11)$$

Współczynniki c_V i c_I oblicza się z zależności (12)

$$c_V = \frac{\partial f(R)}{\partial V} = \frac{1}{I} \quad c_I = \frac{\partial f(R)}{\partial I} = V \left(-\frac{1}{I^2}\right) = -\frac{V}{I^2} \quad (12)$$

Wstawiając je do równania (10) otrzymuje się:

$$u_{Bc}^2(R) = \left(\frac{1}{I}\right)^2 u_{BV}^2 + \left(\frac{-V}{I^2}\right)^2 u_{BI}^2 \quad (13)$$

Wzór (13) jest już końcowym wzorem dla obliczenie niepewności typu B w pośrednim pomiarze rezystancji, jednakże, jeżeli obie strony (13) podzieli się przez $R=V/I$ otrzymuje się dogodniejsza postać obliczeniową w jednostkach względnych stąd indeks „rel” (ang. relative).

$$u_{Bc,rel}^2(R) = \frac{u_{Bc}^2(R)}{R^2} = \frac{\left(\frac{1}{I}\right)^2 u_{BV}^2}{R^2} + \frac{\left(\frac{-V}{I^2}\right)^2 u_{BI}^2}{R^2} \quad \text{czyli przekształcając dalej}$$

$$u_{Bc\text{rel}}^2(R) = \frac{u_{Bc}^2(R)}{R^2} = \frac{\left(\frac{1}{I}\right)^2 u_{Bv}^2}{\left(\frac{V}{I}\right)^2} + \frac{\left(\frac{-V}{I^2}\right)^2 u_{BI}^2}{\left(\frac{V}{I}\right)^2} = \frac{u_{Bv}^2}{V^2} + \frac{u_{BI}^2}{I^2} = u_{BV\text{rel}}^2 + u_{BI\text{rel}}^2 \quad (14)$$

Postać równania z (14) można przedstawić:

$$u_{Bc\text{rel}}^2(R) = \sqrt{u_{BV\text{rel}}^2 + u_{BI\text{rel}}^2} \quad (15)$$

A dalej mając wartość względną niepewności standardowej łącznej w pomiarze pośrednim dla niepewności wyznaczonej metodą typu B

$$u_{BV\text{rel}} = \frac{\Delta_{gr}V}{\sqrt{3} \cdot V} \quad u_{BI\text{rel}} = \frac{\Delta_{gr}I}{\sqrt{3} \cdot I} \quad (16)$$

A następnie

$$u_{Bc} = u_{Bc\text{rel}} \cdot R \quad (17)$$

Jest to niepewność standardowa typu B.

Współczynnik rozszerzenia k_p jest uzależniony od wypadkowego rozkładu niepewności typu A i typu B lub tylko A lub B jeżeli występuje tylko jeden z nich.

Dla rozkładu jednostajnego (prostokątnego) dla p poziomu ufności współczynnik k_p wyraża się zależnością:

$$k_p = p\sqrt{3} \quad \text{dla } p \in \langle 0; 1 \rangle \quad \text{przykładowo: } k_{0,95} = 0,95\sqrt{3}$$

W przypadku dwóch rozkładów prostokątnych rozkładem łącznym jest rozkład trapezowy, z jego szczególnym przypadkiem jest rozkład trójkątny.

W przypadku gdy oprócz niepewności typu B występują niepewność typu A, wówczas ich łączna niepewność standardowa wyraża się zależnością:

$$u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} \quad (18)$$

Niepewność rozszerzona oblicza się ze wzoru (19)

$$U_p = k u_c \quad (19)$$

W którym współczynnik rozszerzenia jest zmienną zależną od rozkładu łącznego niepewności obliczanej metodą typu A i typu B.

Jeżeli w niepewności łącznej u_c dominującym jest rozkład typu A a ten jest rozkładem zbliżonym do Gaussa lub t -Studenta stosuje się współczynniki rozszerzenia odpowiadające tym rozkładom (Tab. 1 i Tab. 1a).

Jeżeli dominującym jest rozkład jednostajny (prostokątny) wówczas stosuje się zależność, że $k_p = p\sqrt{3}$.

Jeżeli żaden powyższych przypadków nie występuje, wówczas dla poziomu ufności $p=0,95$ można przyjąć, że $k_{p=0,95}=2$ ale należy pamiętać, że jest to oszacowanie tylko przybliżone.

PRZEBIEG ĆWICZENIA:

W ćwiczeniu dokonuje się pomiaru rezystancji o nieznannej wartości dwoma metodami: bezpośrednią i pośrednią oraz oblicza się niepewność wyniku pomiaru korzystając z metody typu A i metody typu B, zgodnie z międzynarodowym przewodnikiem GUM - Guide to the expression of uncertainty in measurement „(GUM) JCGM OIML” 1993..

ZADANIE 1:

Pomiar rezystancji metodą bezpośrednią dwuprzewodowa

Za pomocą 4 mierników:

- 1) PROTRK typ 3030S – multimetr analogowy: $\Delta_{grR} = \pm 3\% R_{rdg}$
- 2) METEX typ M3270D $\Delta_{gr} = \pm(0,8\% R_{rdg} + 2c_n)$
- 3) APPA typ 109N – $\Delta_{gr} = \pm(0,3\% R_{rdg} + 3c_n)$
- 4) Rigol DM 3051 ($5\frac{3}{4}$ cyfry) – $\Delta_{gr} = \pm(0,015\% R_{rdg} + 0,006\% R_n)$ dla zakresu $R_n = 4,00000 \text{ k}\Omega$

Wyniki pomiaru rezystancji zanotować w tabeli wyników 1
oznaczenia:

x_{rdg} - wartość odczytana z miernika;

x_n - zakres pomiarowy miernika;

c_n - rozdzielczość własnie używanego zakresu pomiarowego miernika

Tabela wyników 1

TYP miernika	Odczyt z przyrządu	Błąd graniczny przyrządu	Niepewność standardowa	Niepewności dla poziomu ufności $p=0,95$	Zapis końcowy $R = R_{rdg} \pm U$
	R_{rdg}	Δ_{grR}	$u_B = \frac{\Delta_{grR}}{\sqrt{3}}$	$U = 0,95\sqrt{3}u_B$	
	Ω	Ω	Ω	Ω	Ω
PROTEK HC-3030S					
METEX M-3270D					
APPA 109N					
Rigol DM3051					

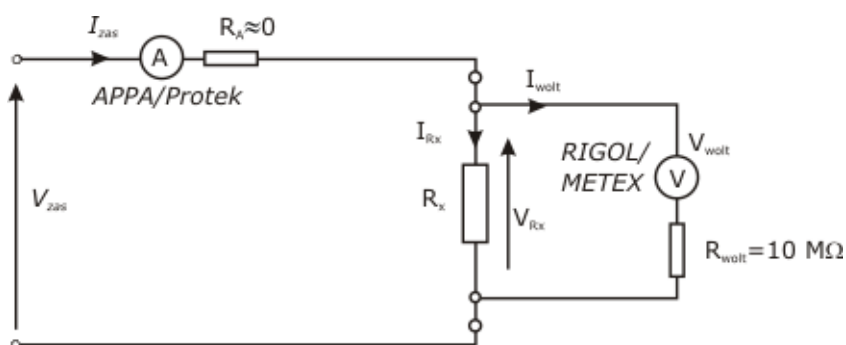
ZADANIE 2

Pomiar rezystancji metodą pośrednią

Dokonać pomiaru rezystancji tego samego obiektu jak w zadaniu 1 metodą pośrednią za pomocą dwóch multimetrów RIGOL i Protek pracujących na zakresach pomiaru napięcia DC oraz APPA i METEX pracujących na zakresach pomiaru prądu (mA) zgodnie ze schematem na rys 3, dla czterech wariantów:

- (i) RIGOL (jako woltomierz) i APPA (jako amperomierz)
- (ii) RIGOL (jako woltomierz) i Protek (jako amperomierz)
- (iii) METEX (jako woltomierz) i APPA (jako amperomierz)
- (iv) METEX (jako woltomierz) i Protek (jako amperomierz)

Pomiar przeprowadzić dla mierników podanych w tabeli 3.



Rys. 5. Schemat blokowy pośredniego pomiaru rezystancji R_x – badana rezystancja, I_{Rx} – prąd płynący przez R_x , V_{Rx} spadek napięcia na rezystancji R_x , A- amperomierz, V- woltomierz, $V_{zas}=5V$ napięcie zasilania, I_{zas} prąd zasilania, V_{wolt} – napięcie woltomierza R_{wolt} – rezystancja wewnętrzna woltomierza I_{wolt} – prąd woltomierza,

Do pomiaru natężenia prądu użyć dwóch - multimetrów: APPA i PROTEK, pracujących na zakresach prądowych, a do pomiaru napięcia multimetrów: RIGOL i METEX pracujących na zakresach napięciowych (pomiaru dla 4 kombinacji mierników zgodnie z rys 5).

Tabela wyników 2. RIGOL $R_{VRIGOL} = 10 \text{ M}\Omega$ METEX $R_{VMETEX} = 10 \text{ M}\Omega$

VOLTOMIE- RZE	U_V Napięcie	$u_{BV \text{ rel}}$	AMPER OMIE- RZE	I_A	$u_{BI \text{ rel}}$	$u_{BR \text{ rel}}$	$U_{Rx \text{ rel}}$	U_{Rx}
	V	%		mA	%	%	%	Ω
RIGOL			APPA					
RIGOL			Protek					
METEX			APPA					
METEX			Protek					

Tab. 2a Obliczenie rezystancji:

Zestaw mierni- ków Woltomierz + amperomierz	$R = \frac{V}{I}$	$u_{BR \text{ rel}} =$ $\sqrt{u_{BV \text{ rel}}^2 + u_{BI \text{ rel}}^2}$	$u_{BRx} =$ $u_{BR \text{ rel}} R$	$U_{BRx} = k u_{BRx}$	Zapis wyniku $R_x \pm U_{BRx}$
	Ω	%	Ω	Ω	Ω
RIGOL + APPA					
RIGOL + Protek					
METEX + APPA					
METEX + Protek					

Tab. 2c Dane techniczne dotyczące dokładności przyrządów wyciąg z instrukcji przyrządów

Typ przyrząd	Zakres pomiarowy	Δ_{gr} - błąd graniczny przyrządu	Sposób obliczenia Δ_{gr}
RIGOL 3051	40 V	$\Delta_{gr} = \pm(\delta_m x_{rdg} + \delta_a x_n)$	$\pm(0,0025\% x_{rdg} + 0,006 x_n)$
METEX M-327D	40 V	$\Delta_{gr} = \pm(\delta_m x_{rdg} + l_{ca} c_n)$	$\pm(0,8\% x_{rdg} + 2c_n)$
APPA 109	20 mA	$\Delta_{gr} = \pm(\delta_m x_{rdg} + l_{ca} c_n)$	$\pm(0,20\% x_{rdg} + 40c_n)$
Protek 3030S	30 mA	$\Delta_{gr} \pm(\delta_a x_n)$	$3\% x_n$

x_{rdg} - pomiar - odczyt z miernika; x_n - zakres/ podzakres pomiarowy miernika

l_n - liczba jednostek; c_n - najmniejsza jednostka podzakresu pomiarowego

δ_m - składowa multiplikatywna błędności granicznej przyrządu; δ_a - składowa addytywna błędności granicznej przyrządu

$$u_{BV \text{ rel}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\Delta_{gr \text{ woltomierza}}}{U_{rdg \text{ woltomierza}}}$$

$$u_{BI \text{ rel}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\Delta_{gr \text{ amperomierza}}}{I_{rdg \text{ amperomierza}}}$$

$$u_{BRx \text{ rel}} = \sqrt{u_{BV \text{ rel}}^2 + u_{BI \text{ rel}}^2}$$

$$U_{Rx \text{ rel}} = k \cdot u_{BRx \text{ rel}}$$

$$U_{Rx} = U_{Rx \text{ rel}} \cdot R_x$$

Uwaga: w przypadku dominującej jednej z niepewności o rozkładzie prostokątnym w stosunku do drugiej, wówczas tę drugą można pominąć i przyjąć, że na poziomie ufności $p=0,95$ współczynnik rozszerzenia „k” wynosi:

$$k = 0,95 \cdot \sqrt{3}$$

w przeciwnym razie można przyjąć, że współczynnik rozszerzenia w przybliżeniu wynosi: $k=2$.

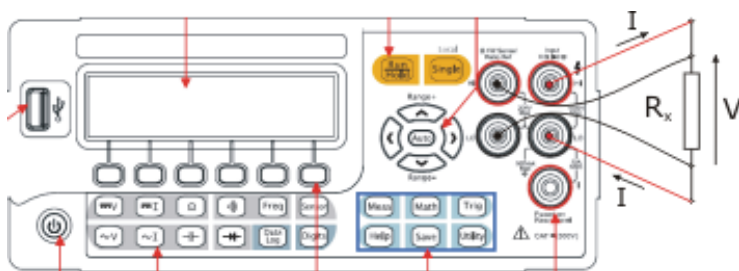
Uwaga:

Błędy wynikające z poboru prądu przez woltomierz elektroniczny włączony równolegle z mierzoną rezystancją są pomijalnie małe gdy $R_x \ll R_V = 10 \text{ M}\Omega$, a ten warunek jest spełniony w tym ćwiczeniu.

ZADANIE 3

Pomiar rezystancji metodą bezpośrednią za pomocą Multimetru RIGOL DM3051. Wykonać 100 pomiarów w odstępach co 1 s. Pomiar w układzie połączeń zgodnym z rys.6.

Na podstawie serii wyników pomiarów obliczyć niepewność typu A, a na podstawie specyfikacji technicznej producenta obliczyć typu B. Postępowanie zgodnie z poniżej opisaną procedurą.

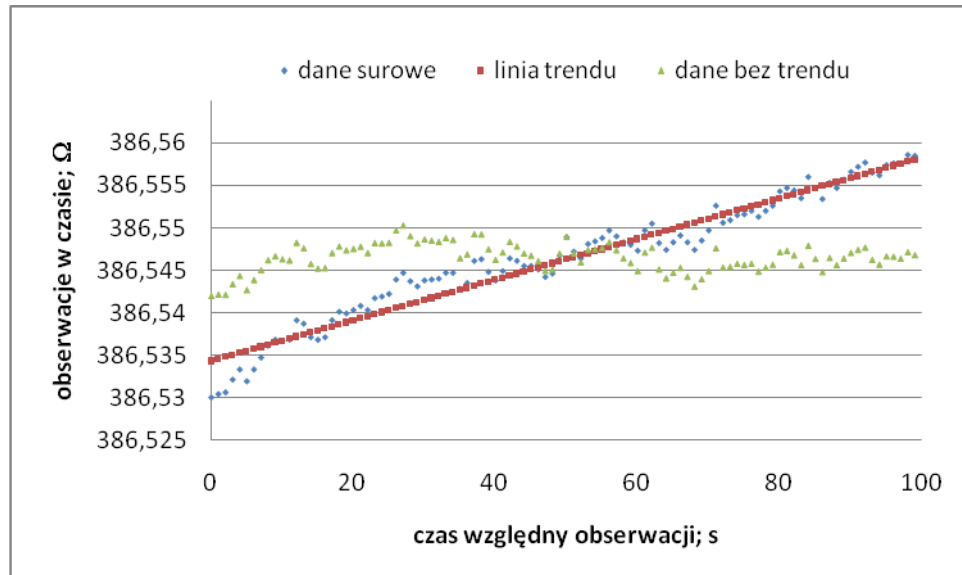


Rys.6. Czteroprzewodowy pomiar rezystancji podłączenie do pomiaru rezystancji

Zachowując uszeregowanie w czasie wartości 100 kolejnych obserwacji wczytać je do arkusza kalkulacyjnego EXCEL i następnie:

1. Wykonać wykres kolejnych obserwacji w czasie $R_i = f(t_i)$; t_i kolejna chwila czasowa odpowiadająca obserwacji
2. Sprawdzić czy w obserwacjach nie występuje trend (rys. 7)

- a. Jeżeli występuje trend należy go wyznaczyć i usunąć z obserwacji, przejść do punktu 3
- b. Jeżeli nie ma trendu, przejść do punktu 3



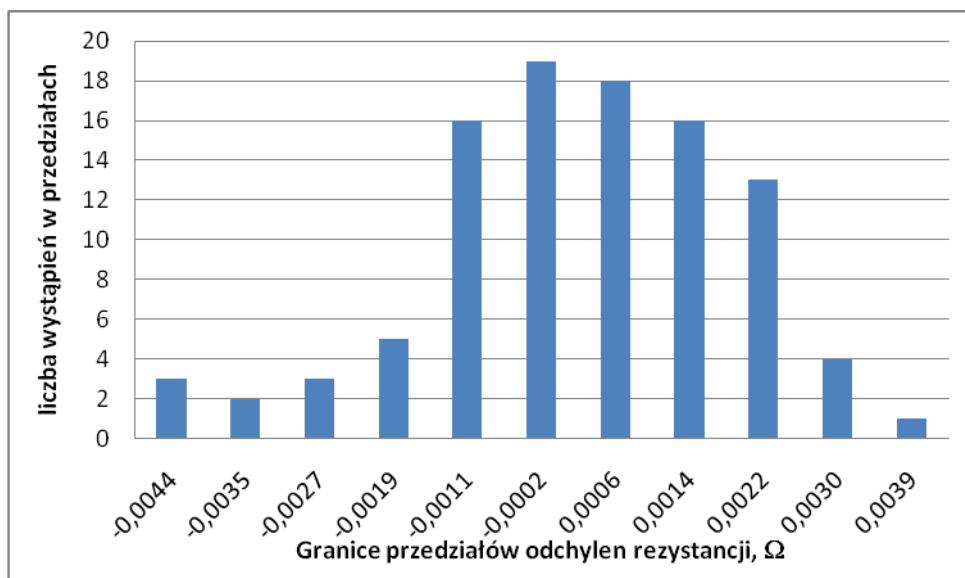
Rys. 7. Przykład wyników obarczonych trendem, linia trendu oraz wyniki skorygowane

3. Obliczyć wartość średnią z obserwacji według wzoru: $\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{n}$:
4. Wyznaczyć błędy pozorne poszczególnych obserwacji obliczając je jako różnice pomiędzy poszczególnymi obserwacjami a wartością średnią według wzoru: $\Delta_i = R_i - \bar{R}_x$
5. Wykonać wykres wartości błędów pozornych w funkcji czasu $\Delta_i = f(t_i)$
6. Dla błędów pozornych oszacować odchylenie standardowe pojedynczego

wyniku w serii korzystając ze wzoru: $s_{(n-1)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta_i)^2}{n-1}}$

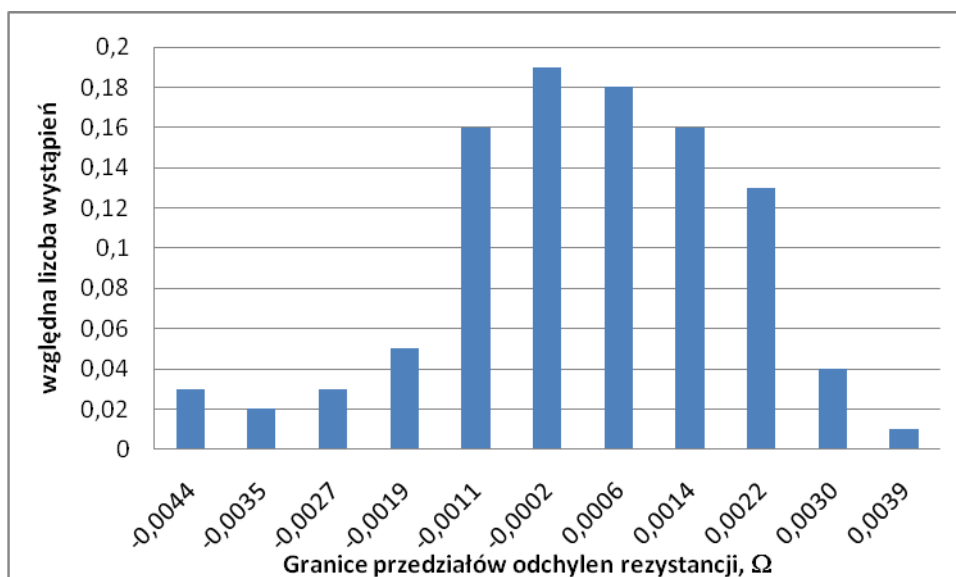
7. Sprawdzić czy w zbiorze błędów pozornych Δ_i dla $i = 1, 2, 3 \dots n$ nie ma tzw. błędów nadmiernych czyli takich które nie spełniają zależności: $|\Delta_i| < 3s_{(n-1)}$ dla $i = 1, 2, 3 \dots n$
 - a. Jeżeli są błędny nadmierne, należy usunąć obserwacje zawierające takie błędy i powtórzyć obliczenia poczynając od punktu 1.
 - b. Jeżeli ma błędów nadmiernych nie przejść dalej do punktu 8.

8. Wyznaczyć częstotliwość występowania błędów pozornych przyjmując 11 przedziałów rozłożonych wokół wartości średniej z polecenia histogram w analizie danych w arkuszu kalkulacyjnym EXCEL (rys. 8)



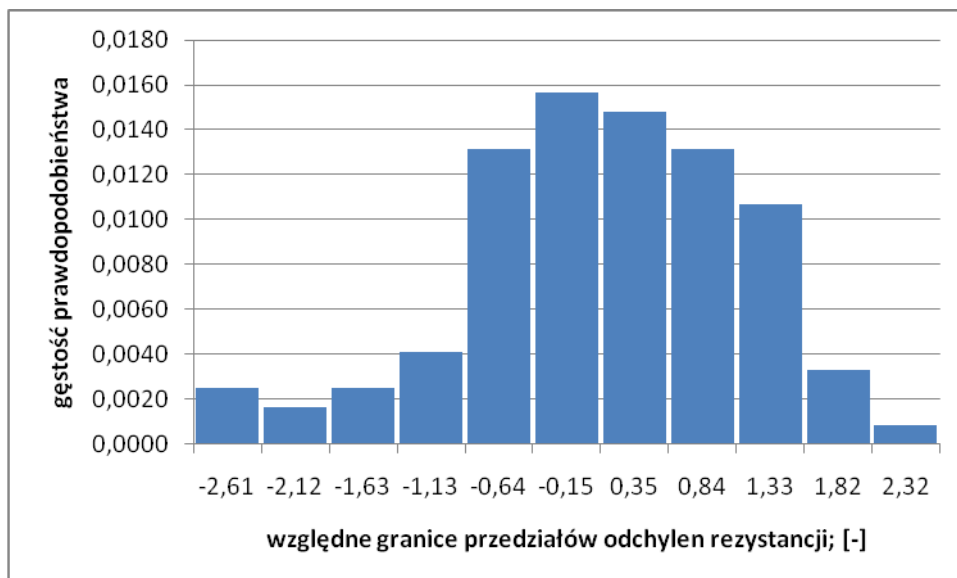
Rys. 8. Liczba wystąpień błędów w podprzedziałach

9. Następnie od histogram błędów należy przejść do prawdopodobieństwa wystąpień błędów dzieląc liczbę wystąpień w każdym z podprzedziałów przez sumę wszystkich obserwacji czyli przez 100 (rys.9).



Rys 9. Liczba względnych wystąpień błędów w podprzedziałach w odniesieniu do liczby wszystkich obserwacji

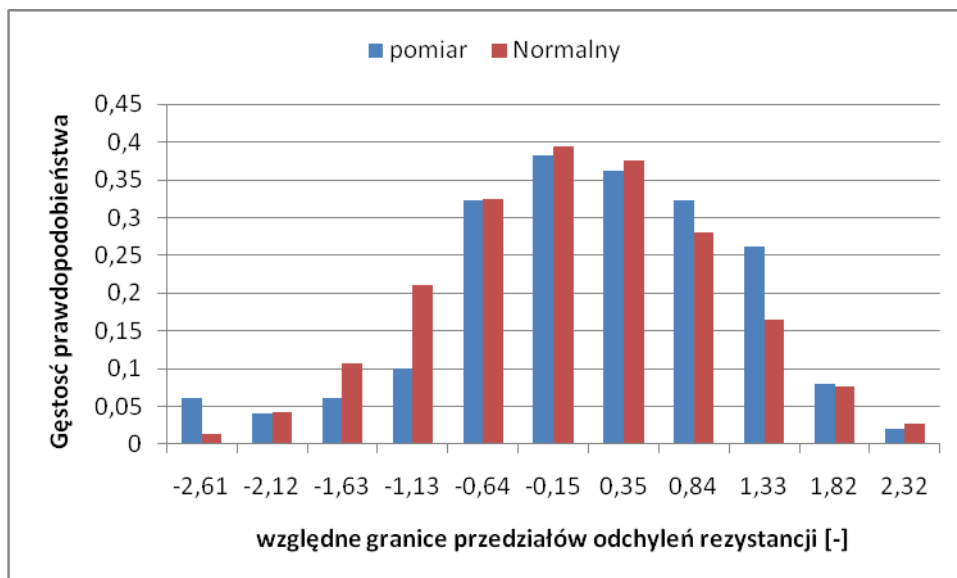
10. Następnie na osi „x” w miejsce wartości mianowanych można wprowadzić parametr względny w odniesieniu do odchylenia standardowego s_i , a na osi pionowej wprowadzimy iloczyn liczby wystąpień w podprzedziałach pomnożone przez szerokości tych przedziałów czyli iloczyn taki będzie gęstością wystąpień w poszczególnych podprzedziałach (rys.10).



Rys.10. Gęstość wystąpień obliczona jako częstość wystąpień razy przedział

11. Tak otrzymany rozkład gęstości prawdopodobieństwa porównujemy z funkcją gęstością prawdopodobieństwa rozkładu normalnego (rys.11).

Rozkład Normalny jest dostępny w arkuszu EXCEL jako funkcja w grupie funkcji statystycznych. Jeżeli jeszcze uczynimy że pole powierzchni pod funkcją rozkładu Normalnego i pod eksperymentalną funkcją gęstości będą jednakowe, wówczas będzie możliwość porównania czy otrzymany rozkład eksperymentalny jest zgodny jakościowo z rozkładem Normalnym.



Rys. 11. Porównanie funkcji gęstości prawdopodobieństwa wyznaczonej na podstawie wyników obserwacji (kolor niebieski) z rozkładem Normalnym (kolor czerwony)

12. Obliczyć odchylenie standardowe średniej:

$$s_{n(n-1)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta_i)^2}{n(n-1)}}$$

13. Obliczyć niepewność typu B zgodnie z danymi producenta korzystając ze

$$\text{wzoru: } u_{BRx} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_{grR} = \frac{1}{\sqrt{3}} (0,15\% R_{rdg} + 0,002\% R_n) = \frac{1}{\sqrt{3}} (0,15\% \bar{R}_x + 0,002\% R_n)$$

14. Obliczenie niepewności rozszerzonej na poziomie ufności $p=0,95$

a. gdy $u_B \gg u_A$; $U_{Rx} \approx U_{BRx \ p=0,95} = 0,95\sqrt{3}u_{BRx} U$

b. gdy $u_B \ll u_A$; $U_{Rx} \approx U_{ARx \ p=0,95} = 1,96 \cdot u_A = 1,96 \cdot s_{n(n-1)}$

c. gdy żaden z powyższych warunków nie jest spełniony czyli żadna z niepewności nie jest dominującą obliczamy niepewność łączna

zgodnie ze wzorem: $u_{R_x} = \sqrt{u_{AR_x}^2 + u_{BR_x}^2}$

i wówczas $U_{R_x} \approx 2 \cdot u_{R_x} = 2 \cdot \sqrt{u_{AR_x}^2 + u_{BR_x}^2}$ dla $p=0,95$

UWAGI KOŃCOWE

Wersja 6

LITERATURA I MATERIAŁY DODATKOWE

1. *Guide to Expression of Uncertainty In Measurement 1 st edition 1993, corrected and reprinted 1995, International Organization for Standardization (Genève, Switzerland)*
2. *Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik. Główny Urząd Miar, Warszawa 1999*
3. *McGhee J., Kulesza W., Korczyński M. J., Henederson I. A., Scientific Metrology, Published by Technical University of Lodz, printed by: ACGM LODART S. A. Łódź, 1998, ISBN 83-904299-9-3,*
4. *Kalus-Jęcek B., Kuśmerek Z.: Wzorce wielkości elektrycznych i ocena niepewności pomiaru. Polit. Łódzka, Łódź 2000, ISBN 83-7283-013-4;*
5. *Kubisa S. , Moskowicz S.: Algorytmizacja procedur oceny niepewności pomiaru. PAK 2/2005.*
6. *Turzeniecka D. Ocena niepewności wyniku pomiarów; Wydaw. Politechniki Poznańskiej;1997; ISBN10: 8371431473; ISBN13: 9788371431470*

Materiały dodatkowe:

1. *Guide to the expression of uncertainty in measurement „ (GUM) JCGM OIML” 1993, , nr 24, s. 75-82.*
2. *Supplement 1 to the Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM) – Propagation of distributions using a Monte Carlo method, “Guide OIML G 1-101” Edition 2007*
3. *Korczyński M. J., Fotowicz P., Hetman A., Gozdur R., Hłobaż A.: Metody obliczania niepewności pomiaru. PAK 2/2005.*
4. *Korczyński M.J., Fotowicz P., Hetman A., Hłobaż A., Lewandowski D.; Sieciowy system informatyczny do obliczania niepewności pomiaru (PAK 2007 nr 02, s. 25-27)*

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

KATEDRA PRZYRZĄDÓW PÓŁPRZEWODNIKOWYCH I OPTOELEKTRONICZNYCH

WWW.DSOD.PL

LABORATORIUM METROLOGII ELEKTRONICZNEJ

ĆWICZENIE NR:	
TEMAT:	

GRUPA LABORATORYJNA		Kierunek/Semestr	
Lp.	NAZWISKO IMIĘ	NR ALBUMU	
1			
2			
3			
4			

Prowadzący:	
Dzień tygodnia: Data wykonania ćwiczenia:	
Data oddania sprawozdania:	
Ocena:	
Uwagi:	

Tabela wyników 1

TYP miernika	Odczyt z przyrządu	Błąd graniczny przyrządu	Niepewność standardowa	Niepewności dla poziomu ufności $p=0,95$	Zapis końcowy $R = R_{rdg} \pm U$
	R_{rdg}	Δ_{grR}	$u_B = \frac{\Delta_{grR}}{\sqrt{3}}$	$U = 0,95\sqrt{3}u_B$	
	Ω	Ω	Ω	Ω	Ω
PROTEK HC-3030S					
METEX M-3270D					
APPA 109N					
Rigol DM3051					

Tabela wyników 2. RIGOL $R_{VRIGOL} = 10 M\Omega$ METEX $R_{VMETEX} = 10 M\Omega$

VOLTOMIETRZE	U_V Napięcie	u_{BVrel}	AMPEROMIETRZE	I_A	u_{BIrel}	u_{BRrel}	U_{Rxrel}	U_{Rx}
	V	%		mA	%	%	%	Ω
RIGOL			APPA					
RIGOL			Protek					
METEX			APPA					
METEX			Protek					

Tab. 2a Obliczenie rezystancji:

Zestaw mierników Woltomierz + amperomierz	$R = \frac{V}{I}$	$u_{BRrel} = \frac{U_{BRx}}{U_{BRx}}$ $\sqrt{u_{BVrel}^2 + u_{BIrel}^2}$	$u_{BRx} = u_{BRrel} R$	$U_{BRx} = k u_{BRx}$	Zapis wyniku $R_x \pm U_{BRx}$
	Ω	%	Ω	Ω	Ω
RIGOL + APPA					
RIGOL + Protek					
METEX + APPA					
METEX + Protek					

Tab. 2c Dane techniczne dotyczące dokładności przyrządów wyciąg z instrukcji przyrządów

Typ przyrząd	Zakres pomiarowy	Δ_{gr} - błąd graniczny przyrządu	Sposób obliczenia Δ_{gr}
RIGOL 3051	40 V	$\Delta_{gr} = \pm(\delta_m x_{rdg} + \delta_a x_n)$	$\pm(0,0025\% x_{rdg} + 0,006 x_n)$
METEX M-327D	40 V	$\Delta_{gr} = \pm(\delta_m x_{rdg} + l_{ca} c_n)$	$\pm(0,8\% x_{rdg} + 2c_n)$
APPA 109	20 mA	$\Delta_{gr} = \pm(\delta_m x_{rdg} + l_{ca} c_n)$	$\pm(0,20\% x_{rdg} + 40c_n)$
Protek 3030S	30 mA	$\Delta_{gr} \pm(\delta_a x_n)$	$3\% x_n$